

# EVALUASI NUMERIK PENDUGA FUNGSI NILAI HARAPAN DAN FUNGSI RAGAM PROSES POISSON MAJEMUK DENGAN INTENSITAS EKSPONENSIAL FUNGSI LINEAR

S. Utami<sup>1</sup>, I W. Mangku<sup>2</sup>, I G. P. Purnaba<sup>2</sup>

## *Abstract*

*Performances of estimators for the mean and variance functions of a compound Poisson process having intensity obtained as an exponential of linear function are investigated using Monte Carlo simulations. The intensity function of this process is assumed to be  $\exp(\alpha + \beta s)$  with  $0 < \beta < \infty$ , where  $\beta$  is assumed to be known. In [8], estimators of the mean and variance functions of this process have been constructed and have been proved to be unbiased, weakly and strongly consistent. The objectives of this research are to check distributions of these estimators using Monte Carlo simulation and to check the convergence to  $1 - \alpha$  of the probabilities that the parameters are contained in the confidence intervals constructed in [11]. Results of the research are as follows. Distribution of estimators for the mean and variance functions are approximately normal. For a given significance level  $\alpha$ , the larger the size of observation interval, the closer the probabilities that the parameters are contained in the confidence intervals to  $1 - \alpha$ .*

*Keywords: compound Poisson process, Monte Carlo simulation, exponential of linear function*

2010 Mathematics Subject Classification: 62E20, 62G20, 62M20.

## PENDAHULUAN

Proses Stokastik merupakan proses yang dapat digunakan untuk memodelkan fenomena yang mengandung unsur ketidakpastian. Proses stokastik dibedakan menjadi dua, yaitu proses stokastik dengan waktu diskret dan proses stokastik dengan waktu kontinu. Salah satu proses stokastik dengan waktu kontinu adalah proses Poisson. Proses Poisson merupakan proses pencacahan dimana banyaknya kejadian pada sebarang interval waktu merupakan peubah acak Poisson. Proses Poisson dapat dibedakan menjadi proses Poisson homogen yang fungsi intensitasnya merupakan fungsi konstan (tidak bergantung pada waktu) dan proses Poisson nonhomogen yang fungsi intensitasnya bergantung pada waktu.

Proses Poisson majemuk adalah salah satu bentuk khusus dari proses stokastik yang memiliki banyak manfaat dalam memodelkan fenomena yang terjadi, seperti pada bidang asuransi dan keuangan [2], fisika [3], dan geologi [7]. Kajian tentang proses Poisson majemuk yang banyak dilakukan menggunakan proses Poisson homogen. Apabila ada suatu kejadian yang memiliki peluang lebih besar terjadi pada suatu interval waktu yang berlainan, maka asumsi penggunaan

---

<sup>1</sup> Mahasiswa S-2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680. E-mail: utami01031993@gmail.com

<sup>2</sup> Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680.

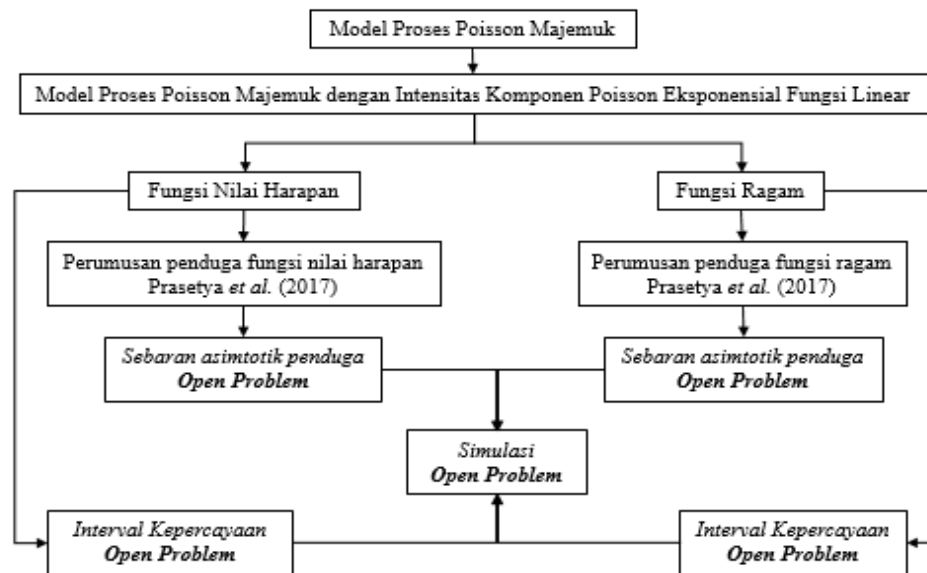
Received: July 22-nd 2018, Accepted: September 24-th 2018

proses Poisson homogen tidak tepat. Untuk kasus ini sebaiknya digunakan proses Poisson nonhomogen, yaitu proses Poisson yang fungsi intensitasnya bergantung dari waktu.

Kajian terhadap proses Poisson majemuk dengan fungsi intensitas komponen Poissonnya berupa fungsi nonhomogen sangatlah luas. Pada Ruhayat [9] diteliti tentang pendugaan fungsi nilai harapan pada proses Poisson periodik majemuk. Kemudian pada Mangku [5] dilakukan modifikasi terhadap penduga fungsi nilai harapan yang disusun pada Ruhayat [9] agar bisa ditentukan pendekatan asimtotik bagi bias dan ragamnya. Pada Makhmudah [4] diteliti tentang pendugaan fungsi ragam proses Poisson periodik majemuk. Pada Wibowo [12] diteliti tentang pendugaan fungsi nilai harapan proses Poisson periodik majemuk dengan tren linear. Pada Abdullah [1] diteliti tentang pendugaan fungsi ragam proses Poisson periodik majemuk dengan tren linear. Pada Prasetya [8] diteliti tentang pendugaan fungsi nilai harapan dan fungsi ragam proses Poisson majemuk dengan intensitas proses Poisson berbentuk eksponensial fungsi linear. Karya ilmiah ini merupakan kelanjutan dari penelitian Prasetya [8] yang difokuskan pada kajian numerik sebaran asimtotik penduga dan interval kepercayaan fungsi nilai harapan dan fungsi ragam proses Poisson majemuk dengan intensitas eksponensial fungsi linear, yang teorinya telah dikaji pada [11]. Hasil penelitian terkait juga dapat dilihat pada [6] dan [10]. Tujuan dari penelitian ini adalah mengamati sebaran penduga fungsi nilai harapan dan fungsi ragam proses Poisson majemuk dengan intensitas eksponensial fungsi linear untuk kasus panjang interval waktu pengamatan terbatas menggunakan simulasi Monte Carlo dan mengamati kekonvergenan ke  $1 - \alpha$  dari peluang parameter tercakup pada interval kepercayaan yang telah dirumuskan pada [11], dengan taraf nyata yang berbeda.

### **METODE PENELITIAN**

Penelitian ini dilakukan dengan alur seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Fokus utama penelitian ini adalah kajian simulasi untuk mengamati sebaran penduga dan kekonvergenan peluang bahwa parameter tercakup pada interval kepercayaan.



Gambar 1 Kerangka pikir penelitian

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dipaparkan pembahasan sesuai metode penelitian yang telah disebutkan.

### Perumusan Penduga

Misalkan  $\{N(t), t \geq 0\}$  adalah suatu proses Poisson nonhomogen dengan fungsi intensitas  $\lambda$  yang terintegralkan lokal dan tidak diketahui. Selanjutnya, fungsi intensitas  $\lambda$  diasumsikan berbentuk eksponensial dari fungsi linear sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= \exp(\alpha + \beta s) \\ &= \exp(\alpha) \exp(\beta s) \\ &= \gamma \exp(\beta s),\end{aligned}\tag{1}$$

dengan  $\gamma = \exp(\alpha)$  dan  $0 < \beta < \infty$ , di mana  $\beta$  diasumsikan diketahui. Misalkan  $\{Y(t), t \geq 0\}$  adalah proses Poisson majemuk, yaitu

$$Y(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\tag{2}$$

dimana  $\{X_i, i \geq 1\}$  adalah barisan peubah acak taknegatif yang *independent and identically distributed* (i.i.d) dengan nilai harapan  $\mu_1 < \infty$  dan ragam  $\sigma_1^2 < \infty$ , yang juga bebas terhadap proses  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

Fungsi nilai harapan dan fungsi ragam dari  $Y(t)$  adalah sebagai berikut

$$\psi(t) = E(Y(t)) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) = E(N(t))E(X_1)\tag{3}$$

dan

$$V(t) = Var(Y(t)) = Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) = E(N(t))E(X_1^2),\tag{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= E(N[0, t]) = \text{Var}(N(0, t)) \\ &= \int_0^t \lambda(s) ds \\ &= \int_0^t \gamma \exp(\beta s) ds = \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Berdasarkan persamaan (1), (2), (3), (4), dan (5), fungsi nilai harapan dan fungsi ragam dari  $Y(t)$  dapat ditulis menjadi

$$\psi(t) = \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1) \mu_1 \quad (6)$$

dan

$$V(t) = \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1) \mu_2, \quad (7)$$

dengan  $\mu_1 = E(X_1)$  dan  $\mu_2 = E(X_1^2)$ .

Untuk menduga fungsi nilai harapan  $\psi(t)$  dan fungsi ragam  $V(t)$  pada persamaan (6) dan (7) diperlukan 3 penduga, yaitu penduga  $\gamma$ , penduga  $\mu_1$ , dan penduga  $\mu_2$ .

Penduga bagi  $\gamma$  dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{\gamma}_{n,\beta} = \frac{\beta}{(\exp(\beta n) - 1)} N([0, n]), \quad (8)$$

dengan  $\hat{\gamma}_{n,\beta} = 0$  saat  $N([0, n]) = 0$ . Penduga bagi  $\mu_1$  dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{\mu}_{1,n} = \frac{1}{N([0, n])} \sum_{i=1}^{N([0, n])} X_i, \quad (9)$$

dengan  $\hat{\mu}_{1,n} = 0$  saat  $N([0, n]) = 0$ . Penduga bagi  $\mu_2$  dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{\mu}_{2,n} = \frac{1}{N([0, n])} \sum_{i=1}^{N([0, n])} X_i^2, \quad (10)$$

dengan  $\hat{\mu}_{2,n} = 0$  saat  $N([0, n]) = 0$ .

Dari persamaan (8), (9), dan (10), diperoleh penduga bagi fungsi nilai harapan  $\psi(t)$  dan fungsi ragam  $V(t)$  yang dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{\psi}_{n,\beta}(t) = \frac{\hat{\gamma}_{n,\beta}}{\beta} (\exp(\beta t) - 1) \hat{\mu}_{1,n} \quad (11)$$

dan

$$\hat{V}_{n,\beta}(t) = \frac{\hat{\gamma}_{n,\beta}}{\beta} (\exp(\beta t) - 1) \hat{\mu}_{2,n}, \quad (12)$$

dengan  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t) = 0$  dan  $\hat{V}_{n,\beta}(t) = 0$  saat  $N([0, n]) = 0$ . Perumusan penduga ini dapat juga dilihat pada [8].

### Beberapa Hasil Teknis

#### Nilai harapan penduga

Misalkan fungsi intensitas  $\lambda$  memenuhi persamaan (1) dan terintegralkan lokal. Jika  $Y(t)$  memenuhi persamaan (2), maka

$$E(\hat{\psi}_{n,\beta}(t)) = \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1) \mu_1 = \psi(t) \quad (13)$$

dan

$$E\left(\widehat{V}_{n,\beta}(t)\right) = \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)\mu_2 = V(t). \quad (14)$$

Jadi  $\widehat{\psi}_{n,\beta}(t)$  merupakan penduga takbias bagi  $\psi(t)$  dan  $\widehat{V}_{n,\beta}(t)$  merupakan penduga takbias bagi  $V(t)$ . Buktinya dapat dilihat pada [8].

### Nilai ragam penduga

Misalkan fungsi intensitas  $\lambda$  memenuhi persamaan (1) dan terintegralkan lokal. Jika  $Y(t)$  memenuhi persamaan (2), maka

$$\text{Var}\left(\widehat{\psi}_{n,\beta}(t)\right) = \frac{1}{(\exp(\beta n) - 1)} \frac{\gamma \mu_2 (\exp(\beta t) - 1)^2}{\beta} \quad (15)$$

dan

$$\text{Var}\left(\widehat{V}_{n,\beta}(t)\right) = \frac{1}{(\exp(\beta n) - 1)} \frac{\gamma \mu_4 (\exp(\beta t) - 1)^2}{\beta}. \quad (16)$$

Karena  $\widehat{\psi}_{n,\beta}(t)$  dan  $\widehat{V}_{n,\beta}(t)$  adalah penduga takbias, maka  $MSE\left(\widehat{\psi}_{n,\beta}(t)\right) = \text{var}\left(\widehat{\psi}_{n,\beta}(t)\right)$  dan  $MSE\left(\widehat{V}_{n,\beta}(t)\right) = \text{Var}\left(\widehat{V}_{n,\beta}(t)\right)$ . Buktinya dapat dilihat pada [8].

### Sebaran Asimtotik Penduga Fungsi Nilai Harapan dan Fungsi Ragam

Berikut disajikan sebaran asimtotik penduga fungsi nilai harapan dan fungsi ragam proses Poisson majemuk dengan intensitas eksponensial fungsi linear.

#### Sebaran asimtotik $\widehat{\psi}_{n,\beta}(t)$

Misalkan fungsi intensitas  $\lambda$  memenuhi persamaan (1) dan terintegral lokal. Jika  $Y(t)$  memenuhi persamaan (2), dan  $\mu_2 = E(X_1^2) < \infty$ , maka

$$(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\widehat{\psi}_{n,\beta}(t) - \psi(t)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_2\right), \quad (17)$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Buktinya dapat dilihat pada [11].

#### Sebaran asimtotik $\widehat{V}_{n,\beta}(t)$

Misalkan fungsi intensitas  $\lambda$  memenuhi persamaan (1) dan terintegral lokal. Jika  $Y(t)$  memenuhi persamaan (2) dan  $\mu_4 = E(X_1^4) < \infty$ , maka

$$(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\widehat{V}_{n,\beta}(t) - V(t)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_4\right), \quad (18)$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Buktinya dapat dilihat pada [11].

### Interval Kepercayaan Fungsi Nilai Harapan dan Fungsi Ragam

Untuk merumuskan interval kepercayaan fungsi nilai harapan dan fungsi ragam proses Poisson majemuk dengan intensitas eksponensial fungsi linear

diperlukan sebaran asimtotik  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t)$  dan  $\hat{V}_{n,\beta}(t)$  sehingga diperoleh interval kepercayaan dengan tingkat kepercayaan  $1 - \alpha$  bagi  $\psi(t)$  dan  $V(t)$ , sebagai berikut

#### Interval kepercayaan untuk $\psi(t)$

Untuk suatu taraf nyata  $\alpha$  dengan  $0 < \alpha < 1$ , interval kepercayaan bagi  $\psi(t)$  diberikan oleh

$$I_{\psi,n} = \left( \hat{\psi}_{n,\beta}(t) - \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_2 \right)^{\frac{1}{2}}}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}}, \hat{\psi}_{n,\beta}(t) + \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_2 \right)^{\frac{1}{2}}}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (19)$$

dengan  $\Phi$  menyatakan fungsi sebaran normal baku ([11]).

#### Interval kepercayaan untuk $V(t)$

Untuk suatu taraf nyata  $\alpha$  dengan  $0 < \alpha < 1$ , interval kepercayaan bagi  $V(t)$  diberikan oleh

$$I_{V,n} = \left( \hat{V}_{n,\beta}(t) - \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_4 \right)^{\frac{1}{2}}}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}}, \hat{V}_{n,\beta}(t) + \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_4 \right)^{\frac{1}{2}}}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (20)$$

dengan  $\Phi$  menyatakan fungsi sebaran normal baku ([11]).

### Kekonvergenan Peluang Parameter Tercakup pada Interval Kepercayaan

#### Kekonvergenan peluang $\psi(t) \in I_{\psi,n}$

Untuk interval kepercayaan  $I_{\psi,n}$  bagi  $\psi(t)$ , diperoleh

$$P(\psi(t) \in I_{\psi,n}) \rightarrow 1 - \alpha, \quad (21)$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Buktinya dapat dilihat pada [11].

#### Kekonvergenan peluang $V(t) \in I_{V,n}$

Untuk interval kepercayaan  $I_{V,n}$  bagi  $V(t)$ , diperoleh

$$P(V(t) \in I_{V,n}) \rightarrow 1 - \alpha, \quad (22)$$

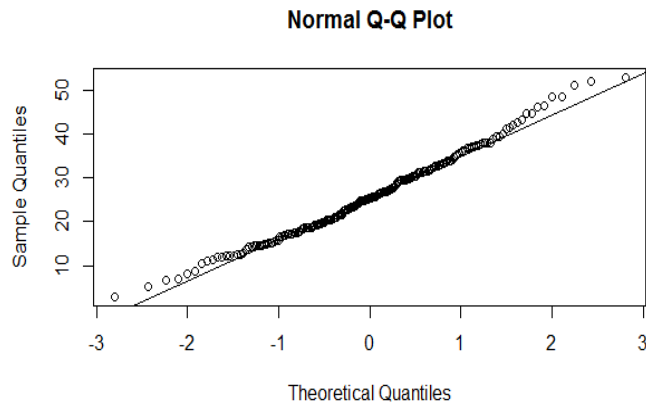
untuk  $n \rightarrow \infty$ . Buktinya dapat dilihat pada [11].

## SIMULASI

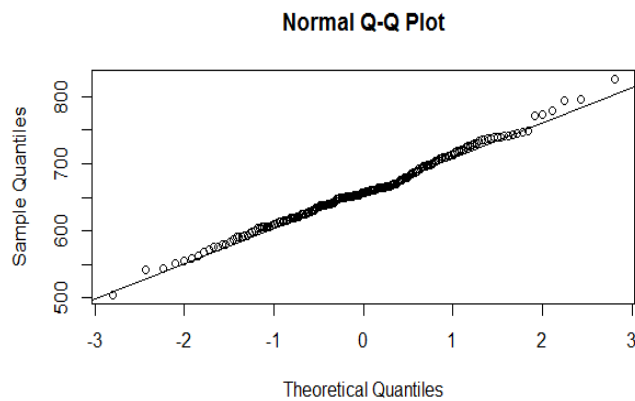
Untuk mengamati perilaku penduga untuk kasus panjang interval pengamatan terbatas  $[0, n]$  untuk  $n = 5, 15$ , dan  $25$ , dilakukan simulasi dengan bantuan perangkat lunak R dan Scilab. Dalam simulasi ini, ditentukan 200 penduga bagi fungsi nilai harapan dan 200 penduga bagi fungsi ragam.

### Simulasi Kenormalan Asimtotik

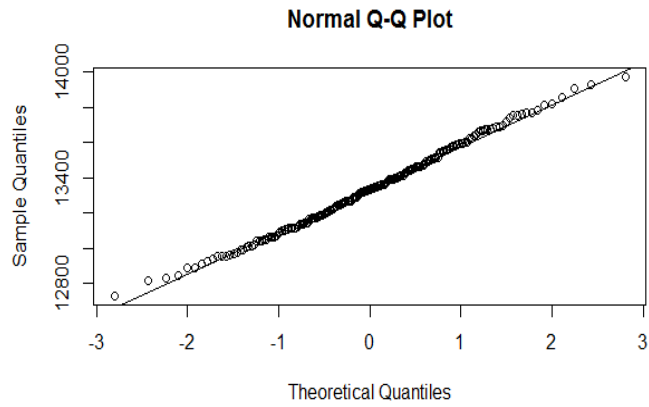
Dengan menggunakan data bangkitan yang berdistribusi Poisson yang diamati pada interval waktu pengamatan terbatas, dipilih nilai  $a = 0.5$ ,  $b = 0.1$ ,  $\mu = 2$  dan  $t = 2$ . Hasil simulasi untuk kenormalan asimtotik dapat dilihat pada gambar berikut.



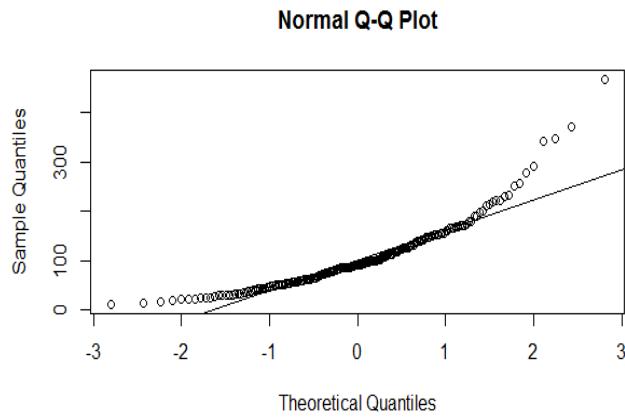
Gambar 2 Sebaran asimtotik  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t)$  pada interval pengamatan  $[0,5]$



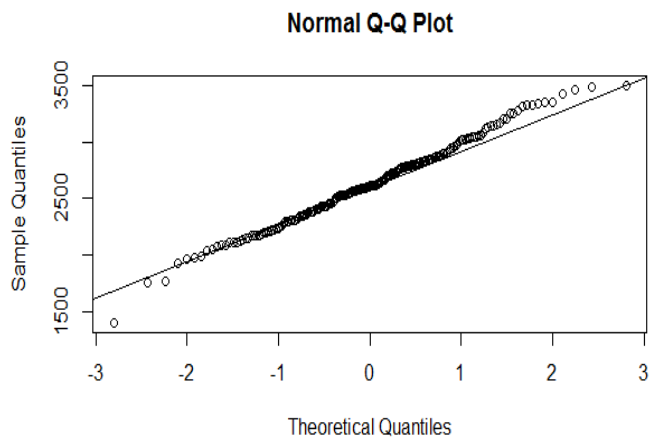
Gambar 3 Sebaran asimtotik  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t)$  pada interval pengamatan  $[0,15]$



Gambar 4 Sebaran asimtotik  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t)$  pada interval pengamatan [0,25]

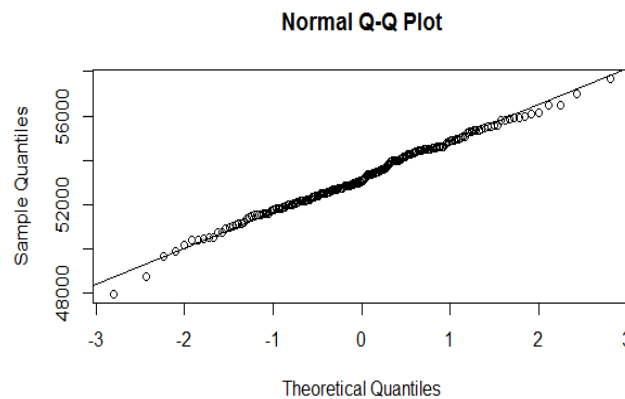


Gambar 5 Sebaran asimtotik  $\hat{V}_{n,\beta}(t)$  pada interval pengamatan [0,5]



Gambar 6 Sebaran asimtotik  $\hat{V}_{n,\beta}(t)$  pada interval pengamatan [0,15]





Gambar 7 Sebaran asimtotik  $\hat{V}_{n,\beta}(t)$  pada interval pengamatan  $[0,25]$

Berdasarkan hasil simulasi normalitas terlihat perilaku dari penduga fungsi nilai harapan dan fungsi ragam proses Poisson majemuk bahwa semakin lebar interval pengamatan  $[0, n]$  maka grafiknya semakin mendekati garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa sebaran dari penduga semakin mendekati normal jika  $n$  semakin besar.

### Simulasi Interval Kepercayaan

Dengan menggunakan data bangkitan yang berdistribusi Poisson yang diamati pada interval waktu pengamatan terbatas, dipilih nilai  $a = 0.5$ ,  $b = 0.1$ ,  $t = 2$ , dan  $\mu = 2$ . Dari  $\mu_1 = E(x_1) = 2$  diperoleh  $\mu_2 = E(x_1^2) = 8$ . Berikut disajikan hasil simulasi selang kepercayaan fungsini nilai harapan dan fungsi ragam untuk interval pengamatan  $[0,5]$ ,  $[0,15]$ , dan  $[0,25]$  dengan taraf nyata  $\alpha$  sebesar 1%, 5%, dan 10%.

**Tabel 1** Hasil simulasi kepercayaan (SK)  $\psi(t)$  di titik  $t = 2$  untuk 200 penduga

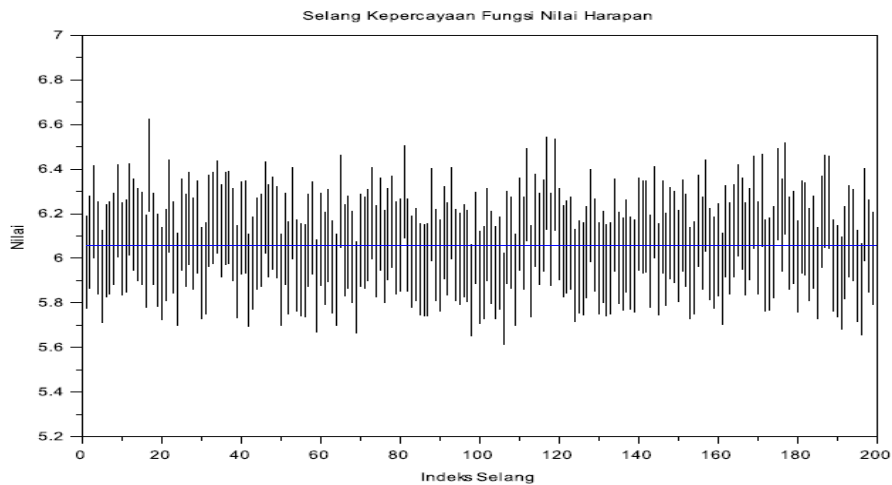
$\alpha$	$n$	Banyaknya SK memuat parameter	Banyaknya SK tidak memuat parameter	Persentase SK memuat parameter	Persentase SK tidak memuat parameter	Galat absolut antara $\alpha$ dan persentase SK tidak memuat parameter
1%	5	194	6	97%	3%	2
	15	197	3	98.5%	1.5%	0.5
	25	198	2	99%	1%	0
5%	5	185	15	92.5%	7.5%	2.5
	15	187	13	93.5%	6.5%	1.5
	25	190	10	95%	5%	0

10%	5	174	26	87%	13%	3
	15	179	21	89.5%	10.5%	0.5
	25	181	19	90.5%	9.5%	0.5

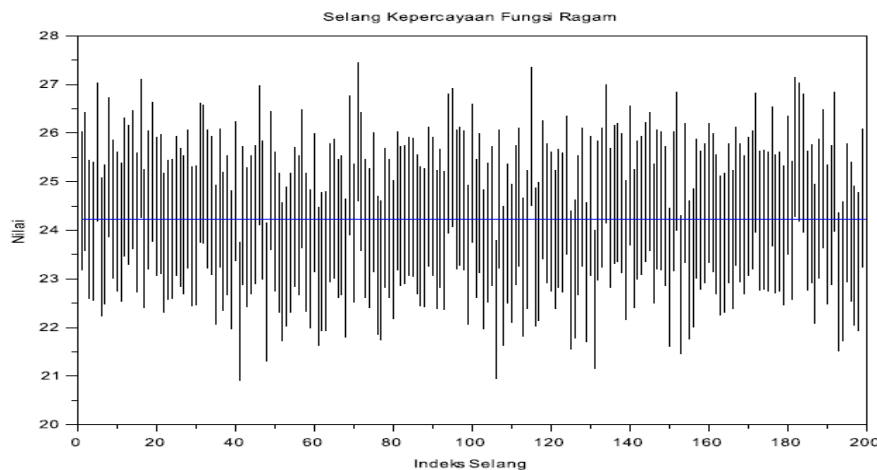
**Tabel 2** Simulasi selang kepercayaan (SK)  $V(t)$  di titik  $t = 2$  untuk 200 penduga

$\alpha$	$n$	Banyaknya SK yang memuat parameter	Banyaknya SK yang tidak memuat parameter	Persentase SK yang memuat parameter	Persentase SK yang tidak memuat parameter	Galat absolut antara $\alpha$ dan persentase SK yang tidak memuat parameter
1%	5	195	5	97.5%	2.5%	1.5
	15	197	3	98.5%	1.5%	0.5
	25	199	1	99.5%	0.5%	0.5
5%	5	188	12	94%	6%	1
	15	191	9	95.5%	4.5%	0.5
	25	192	8	96%	4%	1
10%	5	178	22	89%	11%	1
	15	180	20	90%	10%	0
	25	185	15	92.5%	7.5%	2.5

Sebagai ilustrasi diperlihatkan gambar simulasi selang kepercayaan fungsi nilai harapan  $\psi(t)$  dan fungsi ragam  $V(t)$  di titik  $t = 2$  untuk 200 penduga dengan taraf nyata  $\alpha = 5\%$  dengan  $n = 25$ .



**Gambar 8** Selang kepercayaan  $\psi(t)$  di titik  $t = 2$  untuk  $\alpha = 5\%$  dan  $n = 25$



Gambar 9 Selang kepercayaan  $V(t)$  di titik  $t = 2$  untuk  $\alpha = 5\%$  dan  $n = 25$

Hasil simulasi selang kepercayaan fungsi nilai harapan  $\psi(t)$  menunjukkan bahwa persentase selang kepercayaan yang memuat parameter pada titik  $t = 2$  dengan  $\alpha = 1\%$ ,  $5\%$ , dan  $10\%$  untuk  $n = 5, 15$ , dan  $25$  memiliki kisaran  $97.0\% - 99.0\%$ ,  $92.5\% - 96.0\%$ , dan  $87.0\% - 90.5\%$ . Sedangkan hasil simulasi selang kepercayaan fungsi ragam  $V(t)$  menunjukkan bahwa persentase selang kepercayaan yang memuat parameter pada titik  $t = 2$  dengan  $\alpha = 1\%$ ,  $5\%$ , dan  $10\%$  untuk  $n = 5, 15$ , dan  $25$  memiliki kisaran  $97.5\% - 99.5\%$ ,  $94.0\% - 96.0\%$ , dan  $89.0\% - 92.5\%$ . Hasil simulasi selang kepercayaan fungsi nilai harapan  $\psi(t)$  dan fungsi ragam  $V(t)$  proses Poisson majemuk dengan intensitas eksponensial fungsi linear dengan taraf nyata yang berbeda sesuai dengan teori yang diperoleh, yaitu semakin besar nilai  $n$ , peluang parameter tercakup pada interval kepercayaan semakin dekat dengan  $1 - \alpha$ .

## SIMPULAN

Sebaran asimtotik bagi penduga fungsi nilai harapan  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t)$  dan fungsi ragam  $\hat{V}_{n,\beta}(t)$  dirumuskan sebagai berikut

$$(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}} \left( \hat{\psi}_{n,\beta}(t) - \psi(t) \right) \xrightarrow{d} \text{Normal} \left( 0, \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_2 \right)$$

dan

$$(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}} \left( \hat{V}_{n,\beta}(t) - V(t) \right) \xrightarrow{d} \text{Normal} \left( 0, \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_4 \right),$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ . Dari sebaran asimtotik  $\hat{\psi}_{n,\beta}(t)$  dan  $\hat{V}_{n,\beta}(t)$ , dapat diperoleh interval kepercayaan bagi  $\psi(t)$  dan  $V(t)$ , yaitu

$$I_{\psi,n} = \left( \hat{\psi}_{n,\beta}(t) - \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_2 \right)^{\frac{1}{2}}}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}}, \hat{\psi}_{n,\beta}(t) + \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma}{\beta} (\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_2 \right)^{\frac{1}{2}}}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

dan

$$I_{V,n} = \left( \hat{V}_{n,\beta}(t) - \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma(\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_4}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \hat{V}_{n,\beta}(t) + \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\left( \frac{\gamma(\exp(\beta t) - 1)^2 \mu_4}{(\exp(\beta n) - 1)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

dengan  $\Phi$  menyatakan fungsi sebaran normal baku.

Kekonvergenan peluang bagi  $\psi(t) \in I_{\psi,n}$  dan  $V(t) \in I_{V,n}$  adalah

$$P(\psi(t) \in I_{\psi,n}) \rightarrow 1 - \alpha$$

dan

$$P(V(t) \in I_{V,n}) \rightarrow 1 - \alpha,$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ .

Hasil simulasi adalah sebagai berikut. Semakin lebar interval waktu pengamatan, sebaran dari kedua penduga yang dikaji semakin dekat ke sebaran normal. Peluang parameter berada pada selang kepercayaan dengan taraf nyata yang berbeda sesuai dengan teori, yaitu semakin besar nilai  $n$ , peluang parameter tercakup pada interval kepercayaan semakin dekat dengan  $1 - \alpha$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdullah S, Mangku IW, Siswadi. 2017. Estimation of the variance function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 102(3): 559-572.
- [2] Bening VE, Korolev VY. 2002. *Generalized Poisson Models and Their Application in Insurance and Finance*. Boston (US): VSP International Science Publishers.
- [3] Byrne J. 1969. Properties of compound Poisson processes with applications in statistical physics. *Physica* 45:575-587.
- [4] Makhmudah FI, Mangku IW, Sumarno H. 2016. Estimating the variance function of a compound cyclic Poisson process. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 100(6): 911-922.
- [5] Mangku IW, Ruhayat, Purnaba IGP. 2013. Statistical properties of an estimator for the mean function of a compound cyclic Poisson process. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 82(2): 227-237.
- [6] Mangku IW, Sakinah F, Ruhayat. 2016. Estimating the mean and variance function of a compound Poisson process having power function intensity. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 100(9): 1455-1465.
- [7] Ozel GA, Inal C. 2008. The probability function of the compound Poisson process and an application to aftershock sequence in Turkey. *Environmetrics*. 19:79-85.
- [8] Prasetya IMYE, Mangku IW, Sumarno H. 2017. Estimating the mean and variance of a compound Poisson process with the Poisson intensity obtained as exponential of the linear function. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 102(4): 721-729.

- [9] Ruhiyat, Mangku IW, Purnaba IGP. 2013. Consistent estimator of the mean function of a compound cyclic Poisson process. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 77(2): 183-194.
- [10] Sari IF, Mangku IW, Sumarno, H. 2016. Estimating the mean function of a compound cyclic Poisson process in the presence of power function trend. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 100(11): 1825-1840.
- [11] Utami S. 2018. *Interval Kepercayaan Fungsi Nilai Harapan dan Fungsi Ragam Proses Poisson Majemuk dengan Intensitas Eksponensial Fungsi Linear*. Tesis, Institut Pertanian Bogor.
- [12] Wibowo BA, Mangku IW, Siswadi. 2014. Consistent estimation of the mean function of a compound cyclic Poisson process in the presence of linear trend. *IndoMS Journal on Statistics*. 2(2): 1-10.